Enoncés : Barbara Tumpach

Applications linéaires – Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Le but de cette feuille d'exercices est de comprendre ce qu'est une application linéaire, et d'apprendre à calculer une base du noyau et de l'image d'une telle application.

Exercice 1

1. On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer qu'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est uniquement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Quelle est la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
3. Quelle est la matrice de la projection orthogonale sur l'axe des abscisses dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
4. Quelle est la matrice de la rotation d'angle θ et de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
5. Quelle est la matrice de l'homothétie de centre O et de rapport k dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
6. Quelle est la matrice de la symétrie centrale de centre O dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?
7. Est-ce qu'une translation est une application linéaire ?

[002740]

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y+z+t, x+y+z+t, 2x+2y+2z+2t).$$

1. Montrer que f est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Vérifier que les vecteurs $\vec{a} = (1,-1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,-1,0)$ et $\vec{c} = (0,0,1,-1)$ appartiennent à $\ker f$.
3. Vérifier que le vecteur $\vec{d} = (5,5,5,10)$ appartient à $\mathrm{Im} f$.

[002741]

Exercice 3

Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+y+3z, -x-y-z).$$

1. Justifier que f est linéaire.
2. Donner la matrice de A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f, noté $\ker f$.
   (b) L'application f est-elle injective ?
4. (a) Donner le rang de f et une base de $\mathrm{Im} f$.
   (b) L'application f est-elle surjective ?

[002742]

Exercice 4

1. Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?
2. Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?
3. Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

[002743]

Exercice 5

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de A.
2. Déterminer une base de l'image de A.

[002744]

Exercice 6

Soit la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de B.
2. Déterminer une base de l'image de B.

[002745]

Exercice 7

Soit la matrice
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de C.
2. Déterminer une base de l'image de C.

[002746]